 ISBN : 978-979-16353-8-7

KEKONVEKSKAN DAERAH FISIBEL *SECOND ORDER CONE PROGRAMMING* DENGAN NORMA 1

Caturiyati[1], Ch. Rini Indrati[2], Lina Aryati[2]
[1]Mahasiswa Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM dan
dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
[2]Dosen Jurusan Matematika FMIPA UGM
wcaturiyati@yahoo.com, rinii@ugm.ac.id, lina@ugm.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini disampaikan kekonvekskan daerah fisibel *Second Order Cone Programming* dengan Norma 1.

Kata kunci: daerah fisibel, *Second Order Cone Programming*

PENDAHULUAN

Kekonvekskan merupakan satu hal yang penting dalam mempelajari masalah optimisasi. Terdapat banyak situasi dimana sifat-sifat kekonvekskan telah berkembang menjadi begitu penting. Sebagai contoh, di dalam masalah optimisasi titik-titik fisibel seringkali merupakan himpunan konveks. Kekonvekskan himpunan fisibel memainkan peranan dalam penentuan eksistensi solusi optimal, struktur himpunan solusi optimal, dan yang sangat penting bagaimana menyelesaikan masalah secara numerik.

Telah banyak buku yang mengupas tentang himpunan konveks, diantaranya Rockafellar (1970), Dattorro (2005), dan Boyd and Vandenberghe (2004) membahas himpunan *cone* konveks. Karena demikian pentingnya masalah kekonvekskan maka pada paper ini dibahas mengenai kekonvekskan masalah SOCP norma $\|.\|_1$.

PEMBAHASAN

Sebelum membahas masalah kekonvekskan, terlebih dahulu akan disampaikan definisi norma dan norma $\|.\|_1$ sebagai contohnya.

Definisi 1. (Norma) *Norma dari ruang vektor real atau kompleks* V *adalah fungsi* $\|.\|$ *yang memetakan* V *ke* $\mathbb{R}$ *yang memenuhi syarat-syarat berikut:*

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ *dan* $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$ *untuk setiap skalar* α
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Berikut ini adalah contoh norma 1 yang didefinisikan pada ruang vektor $\mathbb{R}^m$.

Contoh 1: Diberikan ruang vektor real $\mathbb{R}^m$ dan fungsi $\|.\|_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dengan $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \|(x_1, \dots, x_m)\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_m|$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Fungsi $\|.\|_1$ memenuhi aksioma-aksioma norma, yaitu:

1. $\|\boldsymbol{x}\|_1 \geq 0$.

   Untuk $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ berlaku $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \|(x_1, \dots, x_m)\|_1$
   $$= |x_1| + \cdots + |x_m|$$
   $$\geq 0.$$

   $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$

   Untuk $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ berlaku $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \|(x_1, \dots, x_m)\|_1$
   $$= |x_1| + \cdots + |x_m|$$
   $$= 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \dots, x_m = 0,$$

   yaitu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$

2. $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_1 = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_1$ untuk setiap skalar α.

   Untuk $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ dan untuk sebarang skalar α berlaku
   $$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}\|_1 &= \|\alpha(x_1, \dots, x_m)\|_1 \\ &= \|(\alpha x_1, \dots, \alpha x_m)\|_1 \\ &= |\alpha x_1| + \cdots + |\alpha x_m| \\ &= |\alpha||x_1| + \cdots + |\alpha||x_m| \\ &= |\alpha|(|x_1| + \cdots + |x_m|) \\ &= |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_1.\end{aligned}$$

3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_1 = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1$.

   Untuk $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m), \boldsymbol{y} = (\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_m) \in \mathbb{R}^m$ berlaku
   $$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_1 &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m)\|_1 \\ &= |x_1 + y_1| + \cdots + |x_m + y_m| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_m| + |y_m| \\ &= (|x_1| + \cdots + |x_m|) + (|\mathrm{y}_1| + \cdots + |\mathrm{y}_m|) \\ &= \|(x_1, \dots, x_m)\|_1 + \|(\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_m)\|_1 \\ &= \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1.\end{aligned}$$

Selanjutnya disampaikan definisi-definisi mengenai kekonvekskan yang selanjutnya akan digunakan dalam pembahasan paper ini.
Definisi 2. (Himpunan Konveks) *Himpunan C konveks jika untuk sebarang $x_1, x_2 \in C$ dan sebarang λ dengan $0 \leq \lambda \leq 1$, diperoleh $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$.*

Definisi 3. (*Cone*) *Himpunan C disebut cone jika untuk setiap $x \in C$ dan $\lambda \geq 0$ maka $\lambda x \in C$.*

Definisi 4. (*Cone* Konveks) *Himpunan C cone konveks jika C konveks dan merupakan cone.*

Definisi 5. (Kombinasi *Conic*) *Suatu titik berbentuk $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ dengan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ disebut kombinasi conic $x_1, \ldots, x_k$.*

Jika x_i di *cone* konveks C, maka setiap kombinasi *conic* x_i di C.

Selanjutnya akan dibicarakan terlebih dahulu mengenai daerah fisibel.
Definisi 6. (Solusi Fisibel) *Solusi fisibel di dalam masalah optimisasi adalah solusi yang memenuhi semua kendala*.

Definisi 7. (Daerah Fisibel) *Daerah fisibel di dalam masalah optimisasi adalah himpunan semua solusi fisibel yang mungkin*.

Daerah fisibel ini merupakan irisan semua kendala yang ada pada masalah optimisasinya. Sebelum membicarakan kekonvekskan daerah fisibel *second order conic programming* (SOCP) pada norma $\|.\|_1$, akan dibicarakan mengenai SOC dan SOCP pada norma $\|.\|_2$ sebagai berikut. Ben Tal dan Nemirovski mengatakan suatu *cone* $K = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m | \boldsymbol{a} \succeq \boldsymbol{0}\}$, dengan $\boldsymbol{a} \succeq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \succeq \boldsymbol{0}$ dan $\succeq$ suatu urutan parsial, adalah suatu *pointed convex cone* yang memenuhi syarat-syarat berikut:

1. K tak kosong dan tertutup terhadap penjumlahan, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in K \Longrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' \in K$
2. K himpunan *conic*, $\boldsymbol{a} \in K, \lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda\boldsymbol{a} \in K$
3. K *pointed*, $\boldsymbol{a} \in K$ dan $-\boldsymbol{a} \in K \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Dengan urutan parsial pada himpunan K di $\mathbb{R}^n$ terdapat tiga macam *cone* berikut:

1. Ortan nonnegative *cone*, $\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T | x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$
2. *Second Order Cone* (SOC)
$$C_n = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \middle| x_n \geq \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\right\}.$$
3. Semidefinit Positif *Cone* (SDC), S^n_+, *cone* dalam ruang S^n yaitu ruang matriks berukuran $n \times n$ dan memuat semua matriks semidefinit positif $\boldsymbol{A}$ berukuran $n \times n$.

Selanjutnya diberikan definisi program *conic* berikut dari Ben Tal dan Nemirovski.
Definisi 8. Misalkan C suatu *cone* di $\mathbb{R}^m$ (*convex*, *pointed*, *closed*, dan dengan interior tak kosong). Diberikan $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$, matriks kendala $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times n$, dan vektor ruas kanan $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, masalah optimisasi berikut disebut dengan program *conic*,

meminimumkan $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$, dengan kendala $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \geq_C \boldsymbol{0}$

 ISBN : 978-979-16353-8-7

dengan $\geq_C$ urutan parsial pada himpunan *cone* C. Jika C adalah *direct product* beberapa SOC, maka masalah program *conic* di atas disebut dengan masalah *second order cone programming* (SOCP).

Secara umum SOCP dimodelkan sebagai berikut (Lobo et al),

$$\text{meminimumkan } \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x},$$
$$\text{dengan kendala } \|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\|_2 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}+d_i \ (i=1,\dots,N) \qquad (1)$$

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ variabel keputusan, dan parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\| \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_i$ disebut kendala SOC berdimensi n_i.

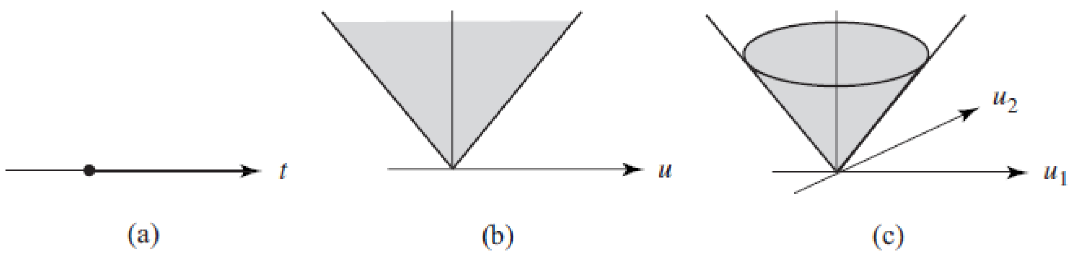
Definisi 9. (SOC) *Second Order Cone norma* $\|.\|_2$ *berdimensi* n *didefinisikan sebagai*

$$C_n = \left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ t\end{bmatrix} \middle| u \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, \textit{untuk } t \geq \|\boldsymbol{u}\|_2\right\}$$

dengan $\|\boldsymbol{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} u_i^2}$.

Lemma 1. *Second Order Cone* C *merupakan himpunan konveks di* $\mathbb{R}^n$.
Bukti: Lihat di NN.

Berikut adalah sketsa *Cone* order dua dalam beberapa dimensi,



Cone order dua berdimensi (a) $n=1$, (b) $n=2$, dan (c) $n=3$.

Kekonvekskan pada cone order dua norma $\|.\|_1$

Didefinisikan terlebih dahulu mengenai SOC norma $\|.\|_1$ sebagai berikut. (Caturiyati dkk, 2012)

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Definisi 10. (SOC norma $\|.\|_1$). *Second Order Cone norma $\|.\|_1$ berdimensi n didefinisikan sebagai*

$$C_n^* = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ t \end{bmatrix} \middle| u \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, \textit{untuk } t \geq \|\boldsymbol{u}\|_1 \right\}$$

dengan $\|\boldsymbol{u}\|_1 = |u_1| + \cdots + |u_{n-1}|$.

Definisi 11. (SOCP norma $\|.\|_1$) (Caturiyati dkk, 2012) *SOCP norma $\|.\|_1$ dimodelkan sebagai berikut,*

meminimumkan $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$,

dengan kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_1 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \ (i = 1, \dots, N)$ (2)

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *variabel keputusan, dan parameter* $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ *dan* $d_i \in \mathbb{R}$. *Kendala* $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_1 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_i$ *disebut kendala SOC norma* $\|.\|_1$ *berdimensi* n_i.

Selanjutnya akan diuraikan suatu lemma kekonvekskan SOC norma $\|.\|_1$ berikut.

Lemma 2. *Diberikan suatu cone order dua norma* $\|.\|_1$
$C_n^* = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_1 \leq t\}$, *akan ditunjukkan* C_m^* *konveks untuk setiap n.*

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1, t_1), \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}_2, t_2) \in C_m^*$ dengan $\|\boldsymbol{u}_1\|_1 \leq t_1$ dan $\|\boldsymbol{u}_2\|_1 \leq t_2$ dan suatu skalar $\lambda \in [0,1]$, diperoleh

$$\lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{u}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{u}_2 \\ \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\|\lambda\boldsymbol{u}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{u}_2\|_1 \leq \lambda\|\boldsymbol{u}_1\|_1 + (1-\lambda)\|\boldsymbol{u}_2\|_1 \leq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2.$$

Terbukti C_n^* adalah himpunan konveks.

Lemma 3. (Kekonvekskan Irisan SOC Norma $\|.\|_1$). *Jika* $C_n^{*i}, i = 1, \dots, k$ *adalah SOC norma* $\|.\|_1$ *yang konveks untuk setiap* i, *maka* $C^* = C_n^{*1} \cap C_n^{*2} \cap \dots \cap C_n^{*k}$ *himpunan konveks.*

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C^*$ dan $\lambda \in [0,1]$. Akan ditunjukkan $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C^*$. Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{*1} \cap C_n^{*2} \cap \dots \cap C_n^{*k}$, maka $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{*1}$ dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{*2}$ dan ...dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{*k}$. Karena $C_n^{*1}, C_n^{*2}, \dots, C_n^{*k}$ konveks, maka $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C_n^{*1}$ dan $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C_n^{*2}$ dan ...dan $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C_n^{*k}$. Sehingga $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C^*$.

Lemma 4. (Kekonvekskan pada SOCP norma $\|.\|_1$). *Untuk kendala SOCP terhadap pemetaan affine berlaku hubungan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\|_1 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}+d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i\\ \boldsymbol{c}_i^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_i\\ d_i\end{bmatrix} \in C_n^*,$$

maka irisan kendala pada SOCP norma $\|.\|_1$ adalah himpunan konveks.

Bukti: Lihat Lemma 4 Caturiyati dkk, 2012 dan Lemma 3 paper ini.

KESIMPULAN

Karena SOC norma $\|.\|_1$ konveks maka masalah SOCP norma $\|.\|_1$ juga konveks.

DAFTAR PUSTAKA

Ben Tal, A. and Nemirovski, A. 2001. *Lectures on Modern Convex Optimization : Analysis, Algorithms, and Engineering applications*. MPS SIAM series on Application. Philadelphia.

Boyd, S., and Vandenberghe, L. 2004. Convex Optimization. Cambridge University Press, Cambridge.

Caturiyati, Ch. Rini Indrati, dan Lina Aryati. 2012. *Second Order Cone* (Soc) Dan Sifat-Sifat Kendala *Second Order Cone Programming* Dengan Norma 1. Dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika di FMIPA UNY, 10 Nopember 2012.

Dattorro, J. 2005. Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry. Meboo Publishing USA, California.

Lobo, M.S., Vandenberghe, L., Boyd, S., and Lebret, H. 1998. Applications of second-order cone programming. Linear Algebra and Its Applications, vol 284, pp. 193-228.

NN, Chapter 14 *Semidefinite and Second-Order Cone Programming*. Diunduh dari http://shmathsoc.org.cn/lu/core%20part/Chap14.pdf pada tanggal 10 Oktober 2012.

Rockafellar, R.T., 1970. Convex Analysis. Princenton University Press. Princenton, New Jersey.